Université Ibn Tofail 2025-2026

Ecole Nationale Supérieure de Chimie-Kénitra

Série n°1, CPI-S3

Exercice 1 :

1. Déterminer les valeurs propres (λ_1, λ_2) et les vecteurs propres y associés (v_1, v_2) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. Vérifier que $B' = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de passage de B à B', où B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est diagonale et formée de λ_1 et λ_2.

Exercice 2 : Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Sans calcul, montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer les sous espaces propres associés aux valeurs propres de A.
4. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f(e_2) = 3e_1 - e_3, \quad f(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base B. Calculer les valeurs propres de f et ses sous espaces propres.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Quel est l'image du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$.

Exercice 5 : Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $M_B(f) = A$.

1. Montrer que -1 et 2 sont les seules valeurs propres de f.
2. Déterminer le sous espace propre E_{-1} et en donner une base B_1.
3. Déterminer le sous espace propre E_2 et en donner une base B_2.
4. Monter qu'en réunissant B_1 et B_2 on obtient une base B' de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer la matrice de passage P de B à B', ainsi que son inverse.
6. Déterminer la matrice représentant f dans la base B'.
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f(e_2) = 3e_1 - e_3, \quad f(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base B. Calculer les valeurs propres de f et ses sous espaces propres.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Quel est l'image du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ par l'application $fofof$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 7 : Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Soit k un paramètre réel et $A_k \in M_3(\mathbb{R})$ définie par $A_k = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{k} & -k \\ -1 & \mathrm{k}+1 & -\mathrm{k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_k. En déduire ses valeurs propres.
2. En distinguant les valeurs de k, déterminer les espaces propres de A_k tout en précisant la dimension de chacun d'entre eux.
3. En déduire que A_k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
4. Trigonaliser A_1.

Exercice 10 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Vérifier que 1 et 2 sont les valeurs propres de A.
2. Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton pour exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A, I. Calculer A^{-1}.

Scanné avec CamScanner